27　図形と計量

229

△ABC の面積が最大になるような x の値

△ABC の面積は，$\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cdot\sin\angle\mathrm{ABC}=3\sin\angle\mathrm{ABC}$ より，

$\sin\angle\mathrm{ABC}=1$ すなわち $\angle\mathrm{ABC}=90°$ のとき最大になる。

よって，$\mathrm{CA}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2$（三平方の定理）より，　$x^2=13$　$\therefore x=\sqrt{13}$

∠ACB が最大になるような x の値

$0°<\angle\mathrm{ACB}<180°$ より，∠ACB が大きいほど $\cos\angle\mathrm{ACB}$ は小さい。

すなわち，$\cos\angle\mathrm{ACB}$ は単調に減少する。

したがって，$\cos\angle\mathrm{ACB}$ が最小になるときの x の値を求めればよい。

ただし，$0<\mathrm{CA}<\mathrm{AB}+\mathrm{BC}$ より，$0<x<5$　・・・①

余弦定理より，

$$\begin{aligned}\cos\angle\mathrm{ACB}&=\frac{\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2-\mathrm{AB}^2}{2\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CA}}\\&=\frac{3^2+x^2-2^2}{2\cdot3\cdot x}\\&=\frac{x^2+5}{6x}\\&=\frac{x}{6}+\frac{5}{6x}\end{aligned}$$

さらに，$x>0$ より，相加平均≧相乗平均が成り立つ。

よって，$\cos\angle\mathrm{ACB}=\dfrac{x}{6}+\dfrac{5}{6x}\geqq2\sqrt{\dfrac{x}{6}\cdot\dfrac{5}{6x}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

等号が成立するのは，すなわち $\cos\angle\mathrm{ACB}$ が最小となるのは，$\dfrac{x}{6}=\dfrac{5}{6x}$ のときである。

そこで，このときの x の値を求めるため，$\dfrac{x}{6}=\dfrac{5}{6x}$ の両辺に $6x$ を掛け，整理すると，$x^2=5$

よって，$\cos\angle\mathrm{ACB}$ が最小となるような x の値は $\sqrt{5}$ であり，これは①を満たす。

ゆえに，$x=\sqrt{5}$

230

(1)

余弦定理より，

$$\mathrm{CA}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cos\angle\mathrm{ABC}$$
$$=4^2+6^2-2\cdot4\cdot6\cos60^\circ$$
$$=28$$

よって，余弦定理より，

$$\cos\angle\mathrm{ACB}=\frac{\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2-\mathrm{AB}^2}{2\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CA}}$$
$$=\frac{6^2+28-4^2}{2\cdot6\cdot\sqrt{28}}$$
$$=\frac{2\sqrt{7}}{7}$$

(2)

△DBM において，余弦定理より，

$$\mathrm{MD}^2=\mathrm{DB}^2+\mathrm{BM}^2-2\cdot\mathrm{DB}\cdot\mathrm{BM}\cdot\cos\angle\mathrm{DBM}$$

ここで，$\mathrm{MD}=x$ とすると，$\mathrm{BD}=\mathrm{AB}-\mathrm{AD}=\mathrm{AB}-\mathrm{MD}=4-x$

また，$\mathrm{BM}=\frac{1}{2}\mathrm{BC}=3$，$\cos\angle\mathrm{DBM}=\cos\angle\mathrm{ABC}=\cos60^\circ=\frac{1}{2}$

よって，

$$x^2=(4-x)^2+3^2-2\cdot(4-x)\cdot3\cdot\frac{1}{2}$$
$$=x^2-5x+13$$

より，$x=\frac{13}{5}$

ゆえに，$\mathrm{MD}=\frac{13}{5}$

△CEM において，余弦定理より，

$$\mathrm{EM}^2=\mathrm{CE}^2+\mathrm{MC}^2-2\cdot\mathrm{CE}\cdot\mathrm{MC}\cdot\cos\angle\mathrm{ECM}$$

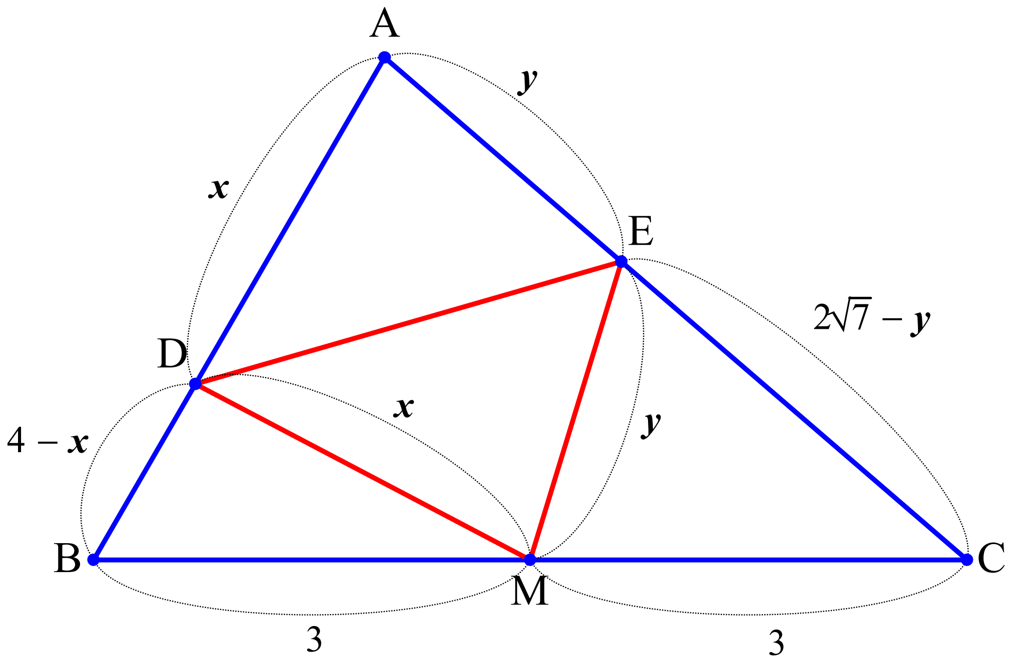
ここで，$\mathrm{ME}=y$ とすると，$\mathrm{CE}=\mathrm{CA}-\mathrm{EA}=\mathrm{CA}-\mathrm{ME}=2\sqrt{7}-y$

また，$\mathrm{MC}=\frac{1}{2}\mathrm{BC}=3$，$\cos\angle\mathrm{ECM}=\cos\angle\mathrm{ACB}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$

よって，$y^2=\left(2\sqrt{7}-y\right)^2+3^2-2\cdot\left(2\sqrt{7}-y\right)\cdot3\cdot\frac{2\sqrt{7}}{7}$ より，$y=\frac{13\sqrt{7}}{16}$

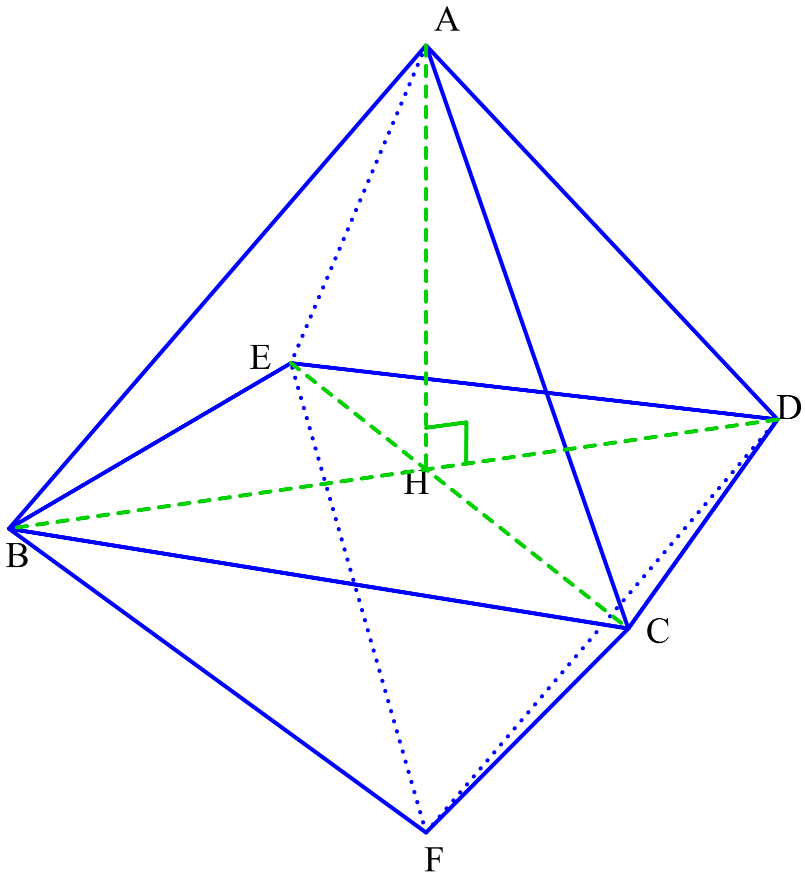
ゆえに，$\mathrm{ME}=\frac{13\sqrt{7}}{16}$

参考図



231

正八面体の体積・外接球の半径



上図を 1 辺の長さが a の正八面体とすると，正八面体は合同な 2 つの正四角錐に分解できるから，その体積は正四角錐 ABCDE の体積を 2 倍したものと等しい。

正四角錐 ABCDE の頂点 A から底面の正方形 BCDE に下ろした垂線の足は底面の対角線の交点と一致し，これを H とすると， $\mathrm{AH}=\sqrt{\mathrm{AB}^2-\mathrm{BH}^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$

よって，正四角錐 ABCDE の体積は $\frac{1}{3}\cdot a^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a=\frac{\sqrt{2}}{6}a^3$

ゆえに，1 辺の長さが a の正八面体の体積は $\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$ ・・・(答)

また，H と各頂点の距離が等しいから，外接球の中心は H である。

したがって，外接球の半径＝AH＝$\frac{\sqrt{2}}{2}a$ ・・・(答)

内接球の半径

H は各面から等距離にあるから，内接球の中心は H である。

したがって，H から面 ABC に下ろした垂線の足を N とし，AN の長さを求めればよい。

△HNA，△HNB，△HNC について

∠HNA＝∠HNB＝∠HNC＝90°，HA＝HB＝HC，HN は共通

よって，直角三角形の合同条件により，△HNA≡△HNB≡△HNC

これより，NA＝NB＝NC　すなわち N は△ABC の外心であるが，

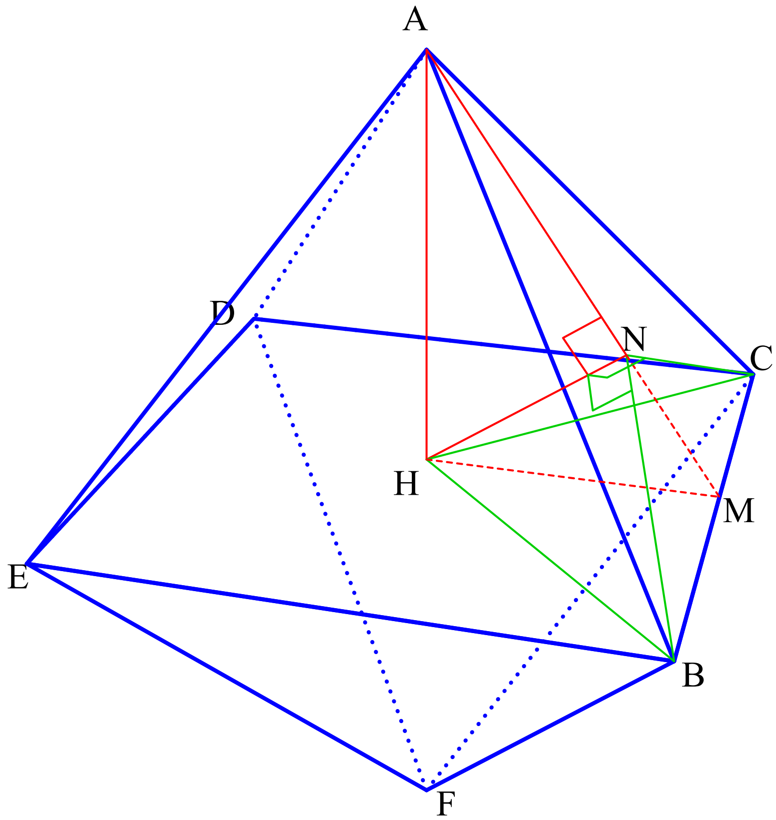
△ABC は正三角形であるから，その外心と重心が一致する。

よって，N は△ABC の重心でもある。

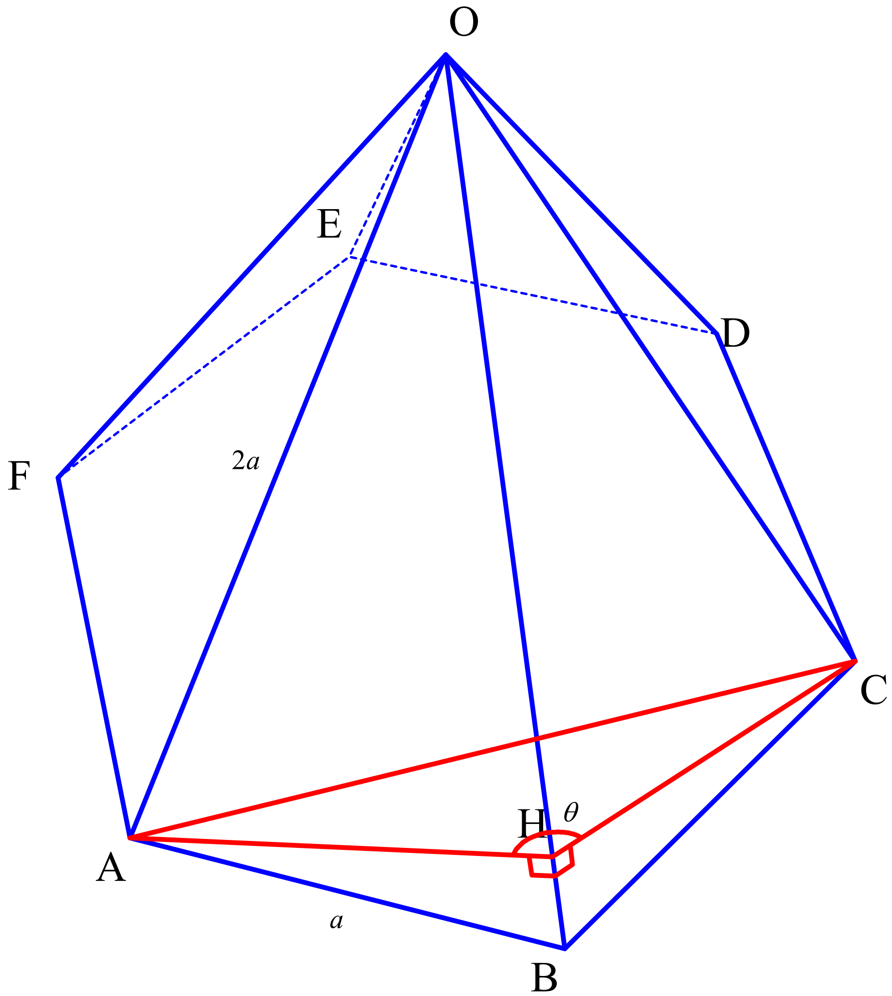
したがって，BC の中点を M とすると，$\mathrm{AM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ より，$\mathrm{AN}=\dfrac{2}{3}\mathrm{AM}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$

これと，$\mathrm{AH}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$ および三平方の定理より，$\mathrm{HN}=\sqrt{\mathrm{AH}^2-\mathrm{AN}^2}=\sqrt{\dfrac{a^2}{2}-\dfrac{a^2}{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}a$

よって，内接球の半径は $\dfrac{\sqrt{6}}{6}a$



232



六角錐底面の△ABC の部分は頂角 B が 120° の二等辺三角形だから，余弦定理より，

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC\cos\angle ABC \\ &= a^2 + a^2 - 2a^2\cos 120° \\ &= 3a^2 \quad \cdots ① \end{aligned}$$

A から OB に下ろした垂線の足を H とすると，△ABH と△CBH について，

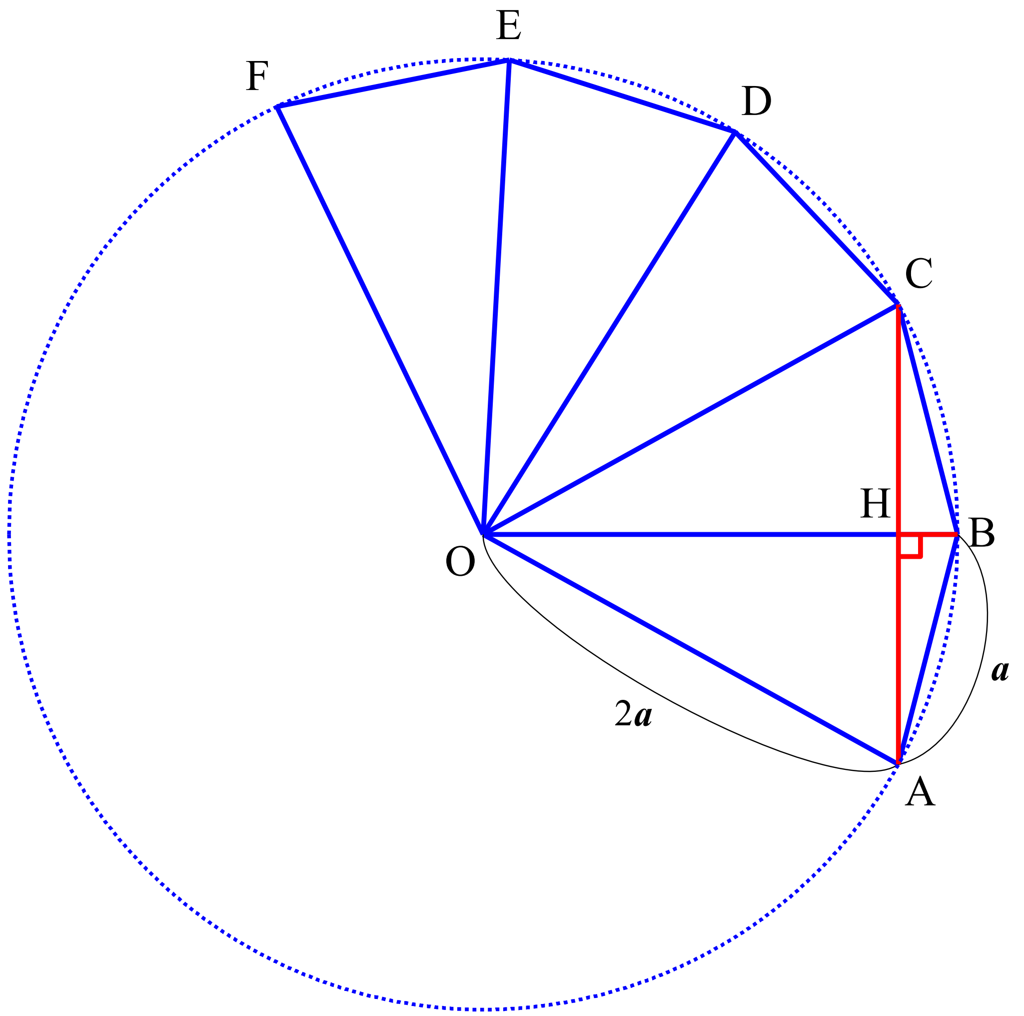
AB＝CB，BH 共通，∠ABH＝∠CBH より，△ABH≡△CBH

よって，CH⊥OB かつ CH⊥OB より，$\angle AHC = \theta$

したがって，△AHC について，余弦定理より，$\cos\theta = \dfrac{AH^2 + HC^2 - AC^2}{2AH \cdot HC}$

これと，①および $AH = HC$ より，$\cos\theta = 1 - \dfrac{3a^2}{2AH^2}$ $\cdots ②$

側面の展開図は下図のようになる。



したがって，

$\mathrm{AH}^2=\mathrm{OA}^2-\mathrm{OH}^2=\mathrm{AB}^2-\mathrm{BH}^2$

ここで，$\mathrm{OH}=x$ とすると，$\mathrm{BH}=\mathrm{OB}-\mathrm{OH}=2a-x$ より，

$\mathrm{AH}^2=4a^2-x^2=a^2-(2a-x)^2$

$4a^2-x^2=a^2-(2a-x)^2$ を解くと，$x=\dfrac{7}{4}a$

よって，$\mathrm{AH}^2=4a^2-x^2=4a^2-\left(\dfrac{7}{4}a\right)^2=\dfrac{15}{16}a^2$

これを②に代入することにより，$\cos\theta=1-\dfrac{3a^2}{2\cdot\dfrac{15}{16}a^2}=1-\dfrac{8}{5}=-\dfrac{3}{5}$

233

(1)

ヘロンの公式より，

$$S=\sqrt{\frac{2+3+4}{2}\left(\frac{2+3+4}{2}-2\right)\left(\frac{2+3+4}{2}-3\right)\left(\frac{2+3+4}{2}-4\right)}=\frac{3\sqrt{15}}{4}$$

補足：ヘロンの公式の導き方

$$\begin{aligned}
S&=\frac{1}{2}bc\sin A\\
&=\frac{1}{2}bc\sqrt{1-\cos^2 A}\\
&=\frac{1}{2}bc\sqrt{(1+\cos A)(1-\cos A)}\\
&=\frac{1}{2}bc\sqrt{\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)}\\
&=\frac{1}{2}bc\sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}\cdot\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}}\\
&=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2}\cdot\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2}}\\
&=\sqrt{\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{-a+b+c}{2}\cdot\frac{a-b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}}\\
&=\sqrt{\frac{a+b+c}{2}\left(\frac{a+b+c}{2}-a\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-b\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-c\right)}
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\mathrm{AP}&=\sqrt{\mathrm{BA}^2+\mathrm{BP}^2-2\mathrm{BA}\cdot\mathrm{BP}\cos B}\\
&=\sqrt{\mathrm{BA}^2+\left(\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AB}+\mathrm{CA}}\cdot\mathrm{BC}\right)^2-2\mathrm{BA}\cdot\left(\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AB}+\mathrm{CA}}\cdot\mathrm{BC}\right)\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-\mathrm{CA}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}}}\\
&=\sqrt{2^2+\left(\frac{2}{2+4}\cdot 3\right)^2-2\cdot 2\cdot\left(\frac{2}{2+4}\cdot 3\right)\frac{2^2+3^2-4^2}{2\cdot 2\cdot 3}}\\
&=\sqrt{6}
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
\mathrm{AO}&=\frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{BA}+\mathrm{BP}}\cdot\mathrm{AP}\\
&=\frac{2}{2+1}\cdot\sqrt{6}\\
&=\frac{2\sqrt{6}}{3}
\end{aligned}$$

(4)

四面体の 2 つの面△ABP と△APC のなす角をθ，点 C から直線 AP に下ろした垂線の足を H，$\mathrm{CH}=h$ とすると，点 C は H を中心に半径hの半円周$(0\leq\theta\leq 180^\circ)$を描く。

よって，△ABP を底面とする四面体の高さは$h\sin\theta$ $(0\leq\theta\leq 180^\circ)$で与えられる。

ゆえに，四面体の高さがhのとき，その体積は最大値をとる。

そこで，hを求めると，

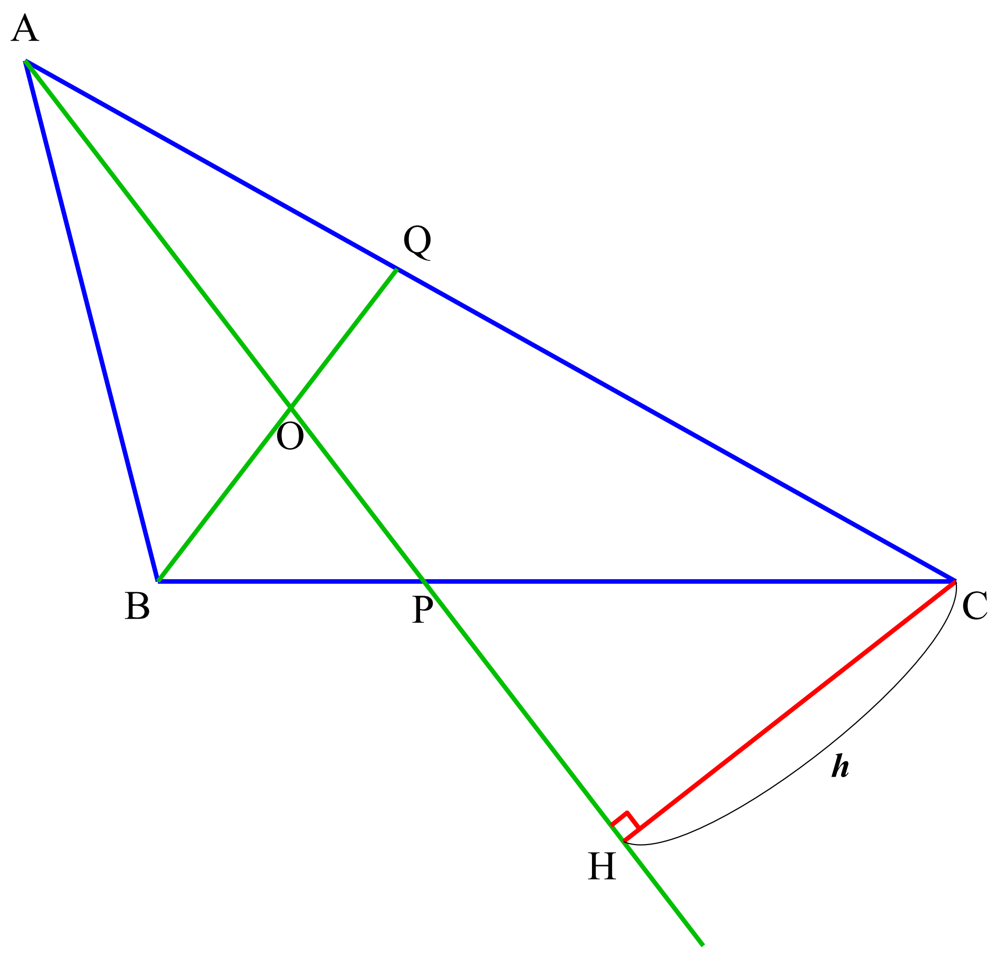
$\Delta\mathrm{APC}=\frac{1}{2}\mathrm{AP}\cdot h=\frac{\sqrt{6}}{2}h$，$\Delta\mathrm{APC}=\frac{\mathrm{PC}}{\mathrm{BC}}\cdot\Delta\mathrm{ABC}=\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3\sqrt{15}}{4}=\frac{\sqrt{15}}{2}$ より，$\frac{\sqrt{6}}{2}h=\frac{\sqrt{15}}{2}$

$\therefore h=\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{6}}$

よって，四面体の体積の最大値は

$$\frac{1}{3}\cdot\Delta\mathrm{ABP}\cdot h=\frac{1}{3}\cdot\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{BC}}\cdot\Delta\mathrm{ABC}\cdot h=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{15}}{4}\cdot\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{6}}=\frac{5\sqrt{6}}{24}$$

参考図



234

単位円の周の長さ > 単位円に内接する正十二角形の周の長さ　・・・①

単位円に内接する正十二角形の周の長さ

1 辺の長さは，頂角が 30° で等辺の長さが 1 の二等辺三角形の底辺の長さと等しく，

その二等辺三角形の底辺の長さは，余弦定理より，

$$\sqrt{1^2+1^2-2\cdot 1\cdot 1\cos 30^\circ}=\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

よって，正十二角形の周の長さは$12\sqrt{2-\sqrt{3}}$　・・・②

単位円の周の長さは2π だから，①，②より，$2\pi > 12\sqrt{2-\sqrt{3}}$

$\therefore \pi > 6\sqrt{2-\sqrt{3}}$　・・・③

また，$\left\{6\sqrt{2-\sqrt{3}}\right\}^2=36\left(2-\sqrt{3}\right)>36(2-1.74)=9.36>9.3025=3.05^2$ より，

$6\sqrt{2-\sqrt{3}}>3.05$　・・・④

よって，③と④より，$\pi > 3.05$

補足

$$\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

ここで，$\sqrt{6}>2.44$，$\sqrt{2}<1.42$ より，$\sqrt{6}-\sqrt{2}>2.44-1.42=1.02$

よって，$\sqrt{2-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}>\dfrac{1.02}{2}$

ゆえに，$\pi>6\sqrt{2-\sqrt{3}}>6\cdot\dfrac{1.02}{2}=3.06>3.05$

ともできるが，

$\sqrt{6}$ の近似値を知らない場合，$2.44<\sqrt{6}<2.45$ であることを見つけなければならない。

235

(1) ポイント：「$\boldsymbol{T}$ で表せ」＝「$\boldsymbol{T}$ で表せる」で楽観的に

条件より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\begin{pmatrix}0\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}+(1-t)\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-t\\ \sqrt{3}t\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=t\begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}+(1-t)\begin{pmatrix}0\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-t\\ \sqrt{3}(1-t)\end{pmatrix}$$

よって，

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|}\\&=\frac{-t(1-t)+3t(1-t)}{\sqrt{4t^2-2t+1}\sqrt{4t^2-6t+3}}\\&=\frac{2t(1-t)}{\sqrt{-4t(1-t)+2t+1}\sqrt{-4t(1-t)-2t+3}}\\&=\frac{2T}{\sqrt{-4T+2t+1}\sqrt{-4T-2t+3}}\\&=\frac{2T}{\sqrt{16T^2-16T+4t(1-t)+3}}\\&=\frac{2T}{\sqrt{16T^2-16T+4T+3}}\\&=\frac{2T}{\sqrt{16T^2-12T+3}}\end{aligned}$$

$4t^2-2t+1$ と $4t^2-6t+3$ を $t(1-t)$ すなわち $-t^2+t$ で割る。

(2)

$$\begin{aligned}T&=-t(1-t)\\&=-t^2+t\\&=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\end{aligned}$$

これと，$0<t<1$ より，$0<T\leq\dfrac{1}{4}$　・・・①

①より，$\cos\theta=\dfrac{2T}{\sqrt{16T^2-12T+3}}>0$

また，このとき $\cos\theta$ は単調に減少する。

したがって，θ が最小値をとるとき，$\dfrac{1}{\cos\theta}$ も最小値をとることになる。

よって，$\dfrac{1}{\cos\theta}$ の最小値における θ の値を求めればよい。

$$\frac{1}{\cos\theta}=\frac{\sqrt{16T^2-12T+3}}{2T}$$
$$=\sqrt{4-3\cdot\frac{1}{T}+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{T}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{3}{4}\left(\frac{1}{T}-2\right)^2+1}$$

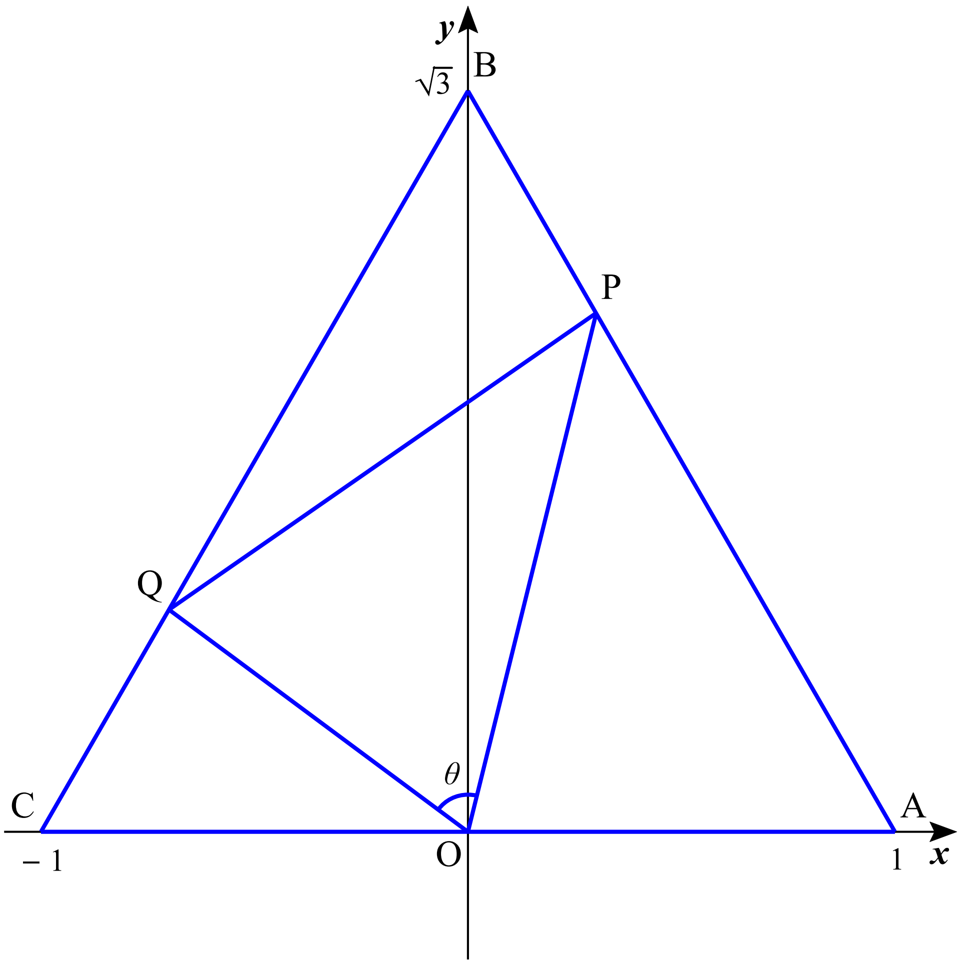
ここで，①より，$\dfrac{1}{T}\geq 4$

よって，$\dfrac{1}{\cos\theta}=\sqrt{\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{T}-2\right)^2+1}\geq\sqrt{\dfrac{3}{4}(4-2)^2+1}=2$ より，$\dfrac{1}{\cos\theta}$ の最小値は 2

すなわち $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$

ゆえに，θ の最小値は $\dfrac{\pi}{3}$

参考図



236

解法 1：等面四面体と直方体の関係を利用して解く。

△ABC を BC $=a$， CA $=b$， AB $=c$ の鋭角三角形とすると，

$c^2+a^2>b^2$ かつ $a^2+b^2>c^2$ かつ $b^2+c^2>a^2$，

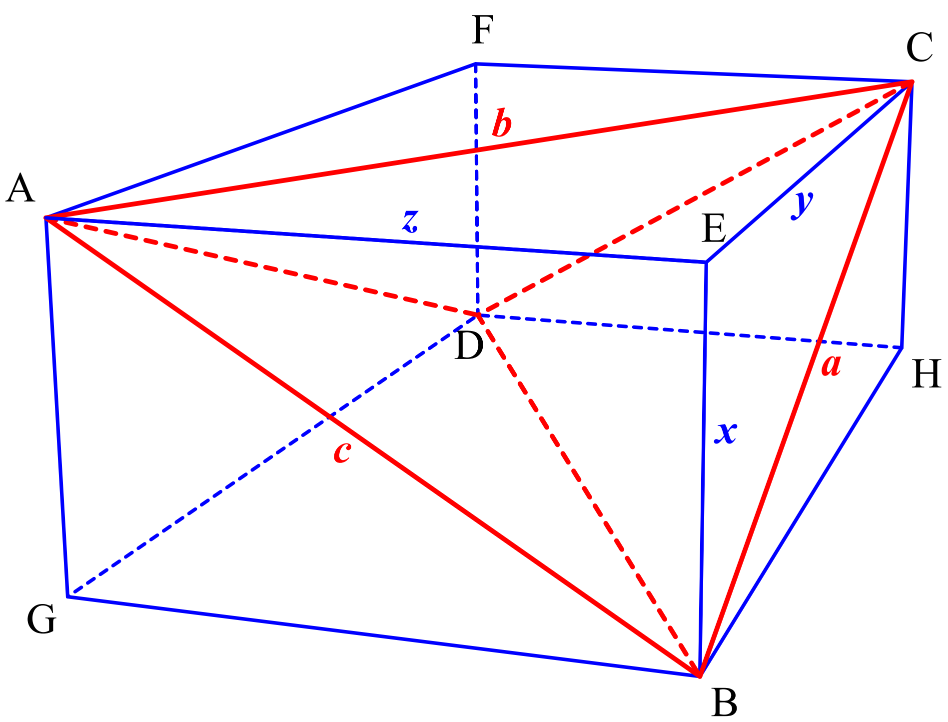
すなわち $c^2+a^2-b^2>0$ かつ $a^2+b^2-c^2>0$ かつ $b^2+c^2-a^2>0$ が成り立つ。

そこで，$c^2+a^2-b^2=2x^2$，$a^2+b^2-c^2=2y^2$，$b^2+c^2-a^2=2z^2$ を満たす正数 x, y, z を考えると， $a^2=x^2+y^2$， $b^2=y^2+z^2$， $c^2=z^2+x^2$ が成り立つことから，

A,B,C は下図のような直方体 ABCD-EFGH の 3 つの頂点とすることができ，

四面体 ABCD は各面すべてが△ABC と合同な四面体となる。

ゆえに，題意が成り立つ。



解法 2：等面四面体と直方体の関係を利用しないで解く。

各面すべて合同な鋭角三角形である四面体 ABCD が存在すると仮定し，

それと相似または合同な四面体 A'B'C'D' の頂点の座標を次のようにとる。

$\mathrm{A'}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B'}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{C'}(s,\ t,\ 0)$，$\mathrm{D'}(p,\ q,\ r)$

ただし，$\Delta\mathrm{A'B'C'}$ が x 軸に関して対称な三角形を，任意の四面体 A'B'C'D' が xy 平面に関して対称な四面体をもたないようにする目的で，$t>0,\ r>0$ とする。

$\Delta\mathrm{A'B'C'}$ が任意の鋭角三角形と相似または合同であるための必要十分条件は，

$\mathrm{A'B'}^2+\mathrm{B'C'}^2>\mathrm{C'A'}^2$ かつ $\mathrm{B'C'}^2+\mathrm{C'A'}^2>\mathrm{A'B'}^2$ かつ $\mathrm{C'A'}^2+\mathrm{A'B'}^2>\mathrm{B'C'}^2$

すなわち，$1+(s-1)^2+t^2>s^2+t^2$ かつ $(s-1)^2+t^2+s^2+t^2>1$ かつ $s^2+t^2+1>(s-1)^2+t^2$

より，$0<s<1$　・・・①　かつ　$t^2+s^2-s>0$　・・・②

また，各面すべて合同ならば $\mathrm{A'B'}^2=\mathrm{C'D'}^2$，$\mathrm{B'C'}^2=\mathrm{A'D'}^2$，$\mathrm{C'A'}^2=\mathrm{B'D'}^2$ が成り立つから，

$1=(p-s)^2+(q-t)^2+r^2 \quad \therefore p^2+q^2+r^2=2ps+2qt-s^2-t^2+1$　・・・③

$(s-1)^2+t^2=p^2+q^2+r^2 \quad \therefore p^2+q^2+r^2=t^2+s^2-2s+1$　・・・④

$s^2+t^2=(p-1)^2+q^2+r^2 \quad \therefore p^2+q^2+r^2=t^2+s^2+2p-1$　・・・⑤

④－⑤より，$2(-p-s+1)=0 \quad \therefore p=1-s$　・・・⑥

③－④より，$2(ps+qt-t^2-s^2+s)=0 \quad \therefore q=t+\dfrac{s^2-s-ps}{t}$

これと⑥より，$q=t-\dfrac{2s(1-s)}{t}$　・・・⑦

⑥と⑦を④に代入すると，$(1-s)^2+\left\{t-\dfrac{2s(1-s)}{t}\right\}^2+r^2=t^2+s^2-2s+1$

よって，$r^2=\dfrac{4s(1-s)(t^2+s^2-s)}{t^2}$ となり，

①，②より，右辺は $\dfrac{4s(1-s)(t^2+s^2-s)}{t^2}>0$ を満たす。

これと，$t>0$ より，$r=\dfrac{2\sqrt{s(1-s)(t^2+s^2-s)}}{t}$　・・・⑧

ゆえに，⑥～⑧より，$\mathrm{D'}\left(1-s,\ t-\dfrac{2s(1-s)}{t},\ \dfrac{2\sqrt{s(1-s)(t^2+s^2-s)}}{t}\right)$ が存在する。

逆に，$\mathrm{A'}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B'}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{C'}(s,\ t,\ 0)$，$\mathrm{D'}\left(1-s,\ t-\dfrac{2s(1-s)}{t},\ \dfrac{2\sqrt{s(1-s)(t^2+s^2-s)}}{t}\right)$

ただし，$0<s<1$，$t^2+s^2-s>0$，$t>0$ とすると，

四面体 A'B'C'D' の各面はすべて合同な鋭角三角形である。

ゆえに，各面がすべて合同な鋭角三角形である四面体 ABCD が存在する。

補足

$A'(0,\ 0,\ 0)$，$B'(1,\ 0,\ 0)$，$C'(s,\ t,\ 0)$のとき$\Delta A'B'C'$が鋭角三角形であるためには，

$0° < \angle A' < 90°,\ 0° < \angle B' < 90°$ より，$0 < s < 1$

$0° < \angle C' < 90°$ より，C' は $A'B'$ を直径とする円の外部に位置しなければならない。

つまり，$A'B'$ を直径とする円は中心が$\left(\frac{1}{2},\ 0,\ 0\right)$，半径が$\frac{1}{2}$だから，

C' と円の中心の距離が$\frac{1}{2}$より大きくなければならない。

よって，$\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+t^2>\left(\frac{1}{2}\right)^2$　すなわち$s^2-s+t^2>0$

ゆえに，$0 < s < 1$ かつ $s^2-s+t^2>0$ であればよい。

また，下図より，

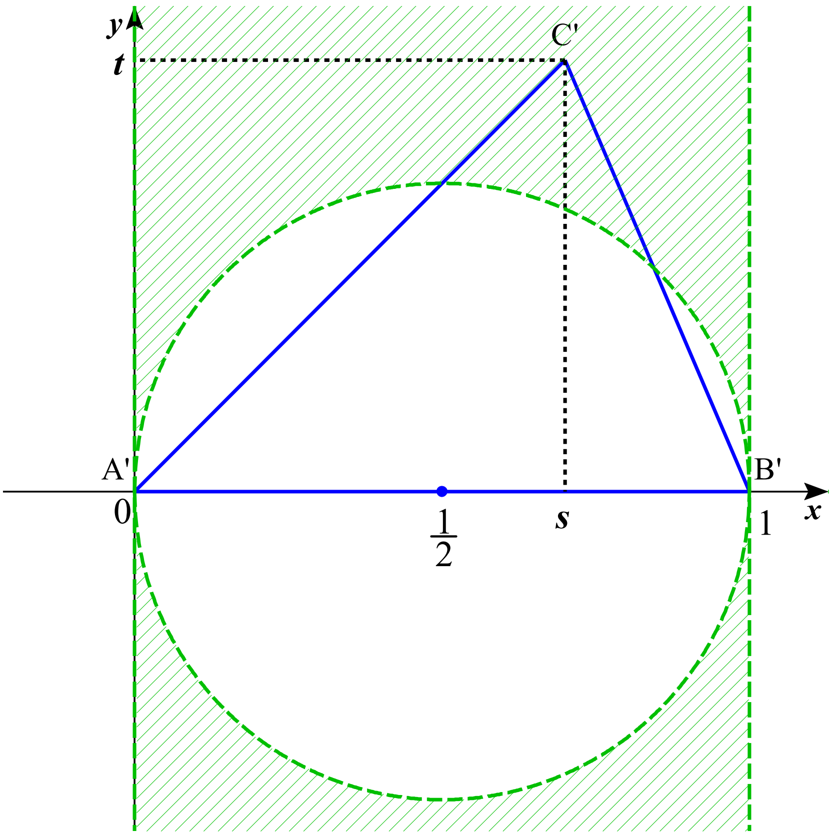
$\Delta A'B'C'$ を直角三角形とすると，$s^2-s+t^2=0$ より，⑧で $r=0$ となる。

したがって，C' が xy 平面上の点となり，四面体ができない。

$\Delta A'B'C'$ を鈍角三角形とすると，（（$s<0$ または$1<s$）かつ$s^2-s+t^2>0$）または（$0<s<1$ かつ $s^2-s+t^2<0$）より，⑧で r は虚数となる。

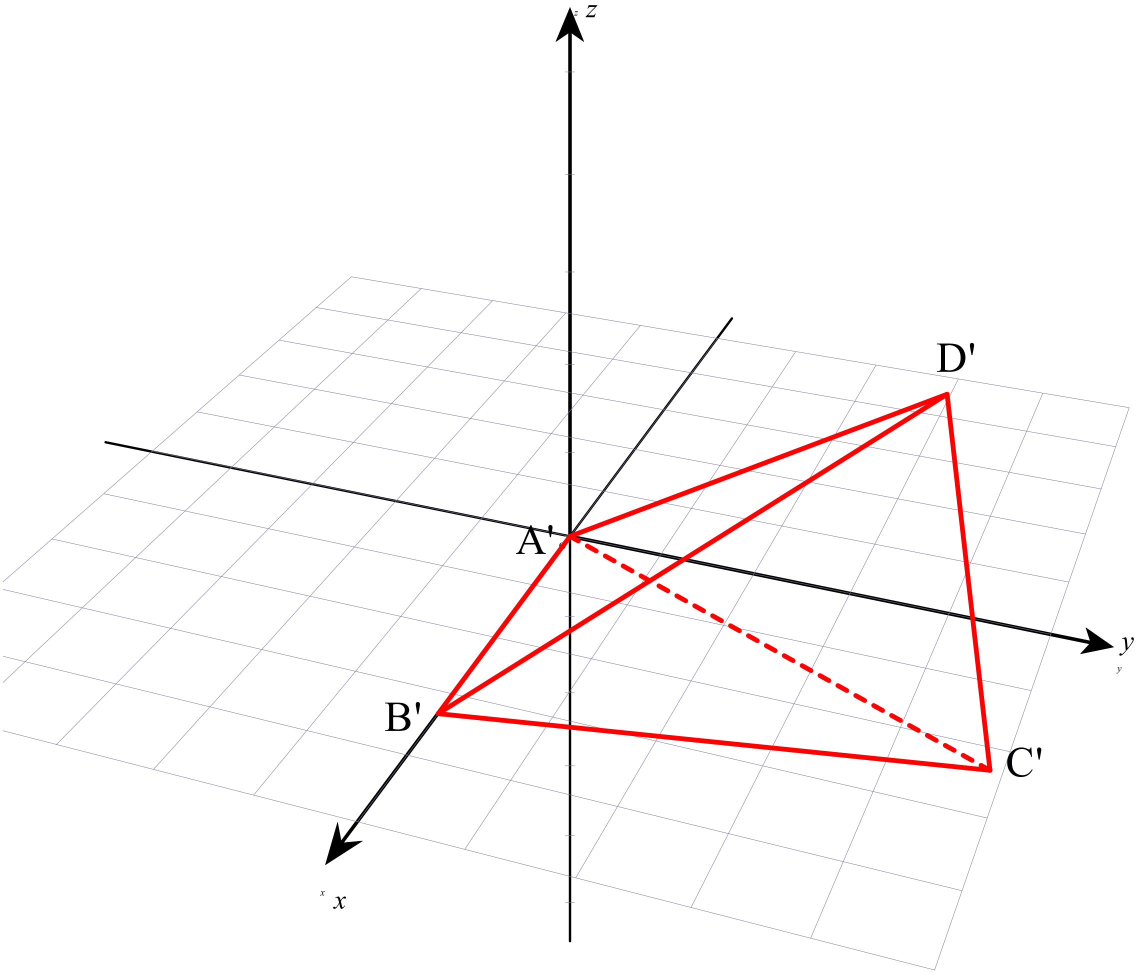
したがって，点C'が存在しないため，四面体ができない。

ゆえに，各面がすべて合同な直角三角形または鈍角三角形である四面体は存在しない。



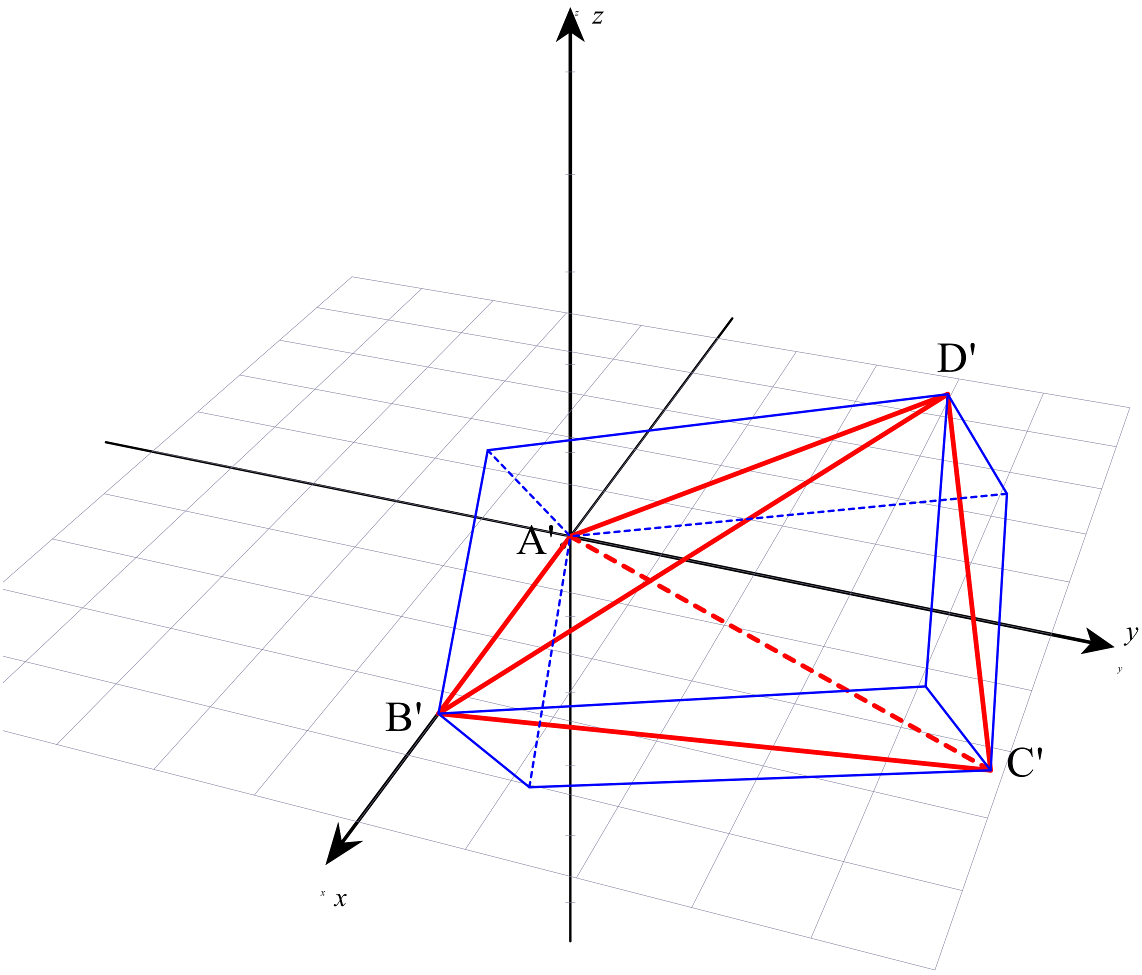
参考図 1

各面がすべて合同な鋭角三角形の四面体 A'B'C'D'



参考図 **2**

等面四面体と直方体



238

(1)

立方体を 1 枚の平面で切断したときできる 2 つの立体のうち，三角形の切り口と立方体の頂点を含む立体は立方体の頂点に 3 直角が集まる直角三角錐である。

そこで，下図のような直角三角錐 ABCD を考え， $\mathrm{AB}=b,\ \mathrm{AC}=c,\ \mathrm{AD}=d$ とすると，

三平方の定理より， $\mathrm{DB}^2=b^2+d^2$， $\mathrm{BC}^2=b^2+c^2$， $\mathrm{CD}^2=c^2+d^2$

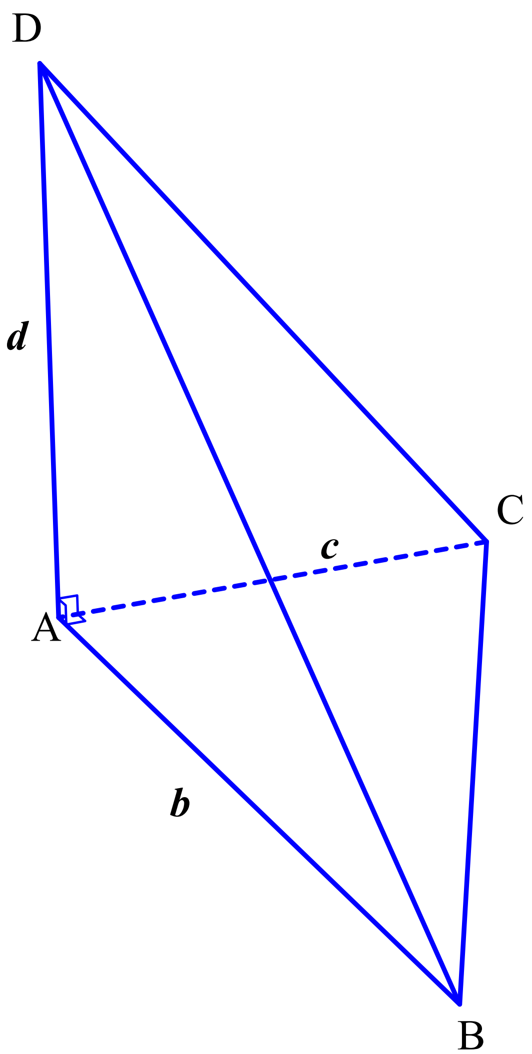
よって，

$\mathrm{DB}^2+\mathrm{BC}^2-\mathrm{CD}^2=2b^2>0$， $\mathrm{BC}^2+\mathrm{CD}^2-\mathrm{DB}^2=2c^2>0$， $\mathrm{CD}^2+\mathrm{DB}^2-\mathrm{BC}^2=2d^2>0$

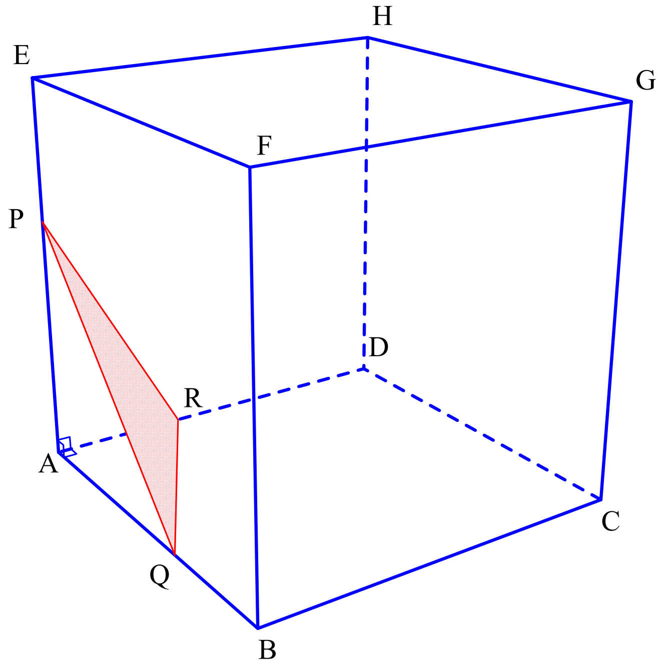
すなわち， $\mathrm{DB}^2+\mathrm{BC}^2>\mathrm{CD}^2$， $\mathrm{BC}^2+\mathrm{CD}^2>\mathrm{DB}^2$， $\mathrm{CD}^2+\mathrm{DB}^2>\mathrm{BC}^2$

より，△DBC は鋭角三角形である。

ゆえに，題意が成り立つ。



(2)



上図の△PQR は立方体 ABCD-EFGH を 1 枚の平面で切断したときの切り口で，
(1)より，△PQR は鋭角三角形である。
また， $\mathrm{AP}=p$， $\mathrm{AQ}=q$， $\mathrm{AR}=r$ とすると，

$\mathrm{PQ}:\mathrm{QR}:\mathrm{RP}=\sqrt{p^2+q^2}\ ::\sqrt{q^2+r^2}\ :\ \sqrt{r^2+p^2}$　・・・①

次に，任意の鋭角三角形 T と相似な鋭角三角形を T' とし，
その 3 辺の長さを $\alpha,\ \beta,\ \gamma$　・・・②　とすると，
$\alpha^2-\beta^2+\gamma^2>0$ かつ $\alpha^2+\beta^2-\gamma^2>0$ かつ $-\alpha^2+\beta^2+\gamma^2>0$　・・・③
さらに， T' と相似な△PQR が存在すると仮定し，
その相似比を，①，②より， $k=\dfrac{\sqrt{p^2+q^2}}{\alpha}=\dfrac{\sqrt{q^2+r^2}}{\beta}=\dfrac{\sqrt{r^2+p^2}}{\gamma}$　とすると，
$p^2+q^2=k^2\alpha^2$， $q^2+r^2=k^2\beta^2$， $r^2+p^2=k^2\gamma^2$ より，
$p=\dfrac{\sqrt{2}}{k}\sqrt{\alpha^2-\beta^2+\gamma^2}$， $q=\dfrac{\sqrt{2}}{k}\sqrt{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}$， $r=\dfrac{\sqrt{2}}{k}\sqrt{-\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$
これと③より， $p,\ q,\ r$ が実数であることを満たす。
さらに，T' の 3 辺の長さのとり方により，k は任意の正の実数をとることができるので，
適当な k をとることにより， $0<p<1$ かつ $0<q<1$ かつ $0<r<1$ とすることができる。
したがって， T' と相似な△PQR が存在する。
ゆえに，切り口が T と相似になるような切り方が存在する。